DEVOIR MAISON N°5

ANALYSE : LIMITE, DÉRIVATION, CONVEXITÉ, ETC.

À rendre pour le lundi 8 janvier.

Partie A – Étude de la régularité d'une fonction f

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue (sur $\mathbb{R}$).
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3) On admet que $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{2}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.
4) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
5) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1$$

6) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) < 0$.
7) Déterminer le tableau de variations de f.

Partie B – Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

8) Montrer que f n'admet qu'un seul point fixe sur $\mathbb{R}$, qu'on note α. Déterminer la valeur de α.
9) Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.
10) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$$

11) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $-\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
12) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|$$

13) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
14) Quelle est la limite de (u_n) ?